安定型確率場とその決定性(無限次元空間上の測度論、無限次元群の表現および関連した話題)

竹中, 茂夫

数理解析研究所講究録
第887巻 1994年 46-54

安定型確率場とその決定性

広島大学理学部　竹中 茂夫 (Shigeo Takenaka)

１９９４年8月 ２９日

無限次元空間上の測度についての研究集会ですが、確率過程論を確率過程の道の作る“無限次元空間”上の確率測度についての研究と見なしまして、最近興味を持っています安定過程とその決定性について話させて頂きます。

パラメータ付きの確率変数の集合 $\{X(\tau,\omega);\tau\in\mathbf{T}\}$ が適当な条件（可分性と呼ばれる稠密な加算個のパラメータでの決定性）を充たすとき、確率過程（$\mathbf{R}^1$ 変数以外は確率場と呼び区別することが多い）と呼ぶ。n ケのパラメータ $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ を決めれば、R^n に値をもつ確率変数 $(X(\tau_1;\omega),X(\tau_2;\omega),\cdots,X(\tau_n;\omega))$ により、確率 P（確率空間は $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ）の像 $\mu_{(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)}$ が定まる。　この像測度の間には、無矛盾性の条件がある。　例えば、

$$\int_T \mu_{(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n-1},\tau_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},dx_n)=\mu_{(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n-1})}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}).$$

すなわち、$\mathbf{T}$ の有限個の元の作る部分集合の作る束 $\mathfrak{T}$ をパラメータ空間とする、上の意味で無矛盾な確率測度の集合 $\{\mu_t;t\in\mathfrak{T}\}$ （＋可分性の条件）が与えられることと、確率過程が与えられることとが同値になる。　抽象的には簡単な条件であるが、ある具体的な条件を充たす確率過程の存在を示したい場合を考えて見れば、この方向はほぼ無力である。　実際、確率過程の構成では、ガウス型の場合を除きこの方法は取らない。

ガウス型確率過程については、$n=2$ すなわち２次元分布（分散）が、より高次元の分布をすべて決定する（２次元による決定性)。　すなわち確率過程の持つ情報が、束全体に散

１９９４年５月　数理研　山崎シンポ用

らばらずに、２次元の切り口 $=\{\tau\in\mathfrak{T};\#\tau=2\}$ に集中している。ここでは、ガウス型を含む対称安定型の確率過程で、このような（必ずしも２次元とは限らないが、有限次元の切り口に情報が集中しているような）決定性をもつクラスを紹介する。

§**1**. なぜ安定型なのか.

安定型確率変数系に入る前に、安定型の特別な場合でもあるガウス型確率変数の特長を３つあげてみよう（この他に情報理論とのつながりで、エントロピー最大という性質があるが今は省く）。

1-1.

(A) [線形性。] 独立なガウス型確率変数の和が又ガウス型になる。これよりガウス型確率変数系（すなわち、線形結合で閉じている空間）を考える事ができる。

(B) [ヒルベルト空間論が利用出来る。] 平均０のガウス型確率変数系の作る線形空間は、共分散を内積とするヒルベルト空間となり、関数解析からの強力な道具が自由に使える。

(C) [中心極限定理。] 最も簡単な形で述べると、平均０で分散が有限な共通の確率分布（例えば３次モーメント有限といったモーメントに関する条件が必要だが）に従う独立確率変数系、$X_i,\ i=1,2,\cdots,$ の和

$$\frac{1}{N^{1/2}}\sum_{i=1}^{N}X_i$$

が $N\to\infty$ でガウス型確率変数となる、であるが、この定理は非常に有効であり、例えばブラウン運動（熱方程式の解の確率論的解釈といってもよい）をランダムウォーク（コイン投げ）の極限と見なすとか、統計で扱う確率変数のモデルとしてガウス型を使う理由となっている。

このようにガウス型は非常に扱い易いクラスである。理論面からも応用面からも重要な Wiener-Hida-Cramér の標準表現の理論にはヒルベルト空間論が不可欠のように見える ([1])。

しかし、ヒルベルト空間論に頼り過ぎると確率過程を見ないことにもなりかねない。 実際、ヘリンガーハーンの定理に由来する確率過程の重複度の部分を除き、Hida の標準表現の基本論文はヒルベルト空間論抜きで書き直す事が可能である ([3])。

上で箇条書きにした性質に類似するものを持つクラスとして、対称安定過程がある。

1-2. 対称安定分布とそのスペクトル.

確率変数 X が指数 $\alpha, 0 < \alpha \leq 2$ の対称安定分布に従うとは、

$$\exists c \geq 0, \mathbf{E}[e^{itX}] = \int_\Omega e^{itX(\omega)} dP(\omega) = \exp(-c|t|^\alpha), t \in \mathbf{R}.$$

もちろん $\alpha = 2$ ならガウス型であり、$\frac{c}{2}$ がその分散である。ここで、直接分布関数を書かずに特性関数の形で書いたのは、特定の場合（$\alpha = 1$ のコーシー分布、$\alpha = 2$ のガウス分布＋ something ）以外では分布関数の具体的な関数形が（初等超越関数及びその組み合わせでは書けないという意味で）知られていないからである。

$\mathbf{R}^n$ の安定分布は、その特性関数が

$$\exp - \left\{ \int_{S^{n-1}} |t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \cdots + t_n\xi_n|^\alpha d\nu(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \right\},$$

ここで ν は S^{n-1} の原点に対して対称な測度, と表わされる時をいう、またこの測度 ν は $\alpha = 2$ のガウス型の場合を除き一意的であり、スペクトル測度と呼ばれる。

すこし、観察をして見よう。まず $\alpha = 2$ のばあい、log(2 次元特性関数) は

$$\int_{S^1} |t_1\xi_1 + t_2\xi_2|^2 d\nu = (t_1)^2 \int (\xi_1)^2 d\nu + t_1 t_2 \int \xi_1\xi_2 d\nu + (t_2)^2 \int (\xi_2)^2 d\nu$$

と 2 次形式となり、 $\int(\xi_1)^2 d\nu, \int \xi_1\xi_2 d\nu, \int(\xi_2)^2 d\nu$ の 3 つの定数で決まってしまう。

安定型の場合を考えよう。　例えば Z_1, Z_2 を互いに独立な、指数α、強さ 1 の対称安定形の確率変数とする。 すなわち

$$\mathbf{E}[e^{itZ_1}] = \mathbf{E}[e^{itZ_2}] = e^{-|t|^\alpha}$$

を充たすとする。これらの確率変数の線形結合

$$X_1 = \sin\theta_1 Z_1 + \sin\theta_2 Z_2$$

$$X_2 = \cos\theta_1 Z_1 + \cos\theta_2 Z_2$$

で表される確率変数 X_1, X_2 の特性関数は、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\exp i(t_1X_1 + t_2X_2)] \\
&\quad = \mathbf{E}[\exp i((t_1 \sin\theta_1 + t_2\cos\theta_1)Z_1 + (t_1\sin\theta_2 + t_2\cos\theta_2)Z_2)] \\
&\quad = \exp(-|t_1\sin\theta_1 + t_2\ cos\theta_1|^\alpha - |t_1\sin\theta_2 + t_2\ cos\theta_2|^\alpha)
\end{aligned}$$

である。 もし非ガウス型 $(\alpha \neq 2)$ でかつ $\theta_1 \neq \theta_2$ ならば、上の特性関数は θ_1, θ_2 にそれぞれ大きさ1の点測度を与えた S^1 上の測度 $\lambda = \delta_{\theta_1} + \delta_{\theta_2}$ を用いて、

$$\exp - \int_{S^1} |(s, \mathbf{t})|^\alpha d\lambda(s), \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2)$$

と表される。 すぐに気がつくように、(θ_1, θ_2) が異なれば、測度 λ は異なり、従って確率変数も異なる。 しかし、ガウス型の場合は θ_1, θ_2 によらず、(X_1, X_2) は $\mathbf{R}^2$ に同じガウス測度を誘導する。

３次元でも同様のことが起こり、ガウス型では特性関数（分布関数も同様）は、２次形式となりその係数は共分散、すなわち２次元の周辺分布の特性関数で決定されてしまうが、非ガウス型の対称安定分布ではそうはならない。

1-3.

1-1. であげた３つの性質であるが、対称安定型の場合にも類似の性質が成立する。

(A) [対称安定系。] 独立な対称安定型確率変数の和はまた、同じ指数の対称安定型確率変数となる。（これは、独立な確率変数の和の特性関数が各々の特性関数の積となることより明らか）これより、ガウス型確率変数系と同様に対称安定型確率変数系が定義される。すなわち、$\{X_\lambda; \lambda \in A\}$ が指数 α の対称安定系であるとは、任意の有限線形和 $\sum_i^N a_i X_i$ が、指数 α の安定分布に従うときをいう。 この条件は、この集合の任意有限個 N の同時分布が N 次元対称安定分布に従うことと同値である。

これで、安定型を考えていくための器ができた。

(B) [空間 $L^{(\alpha)}$。] $X_1, X_2, \cdots$ を独立な対称安定型確率変数系とする。ただし、特性関数は共通で $\exp -|t|^\alpha$ とする。このとき、これは明らかに対称安定系となる。 その１次結合の特性関数は

$$\mathbf{E}[\exp t \sum a_i X_i] = \exp -(\sum |a_i|^\alpha)|t|^\alpha$$

である。$\{Z(t); t \in \mathbf{R}^1\}$ を独立確率変数系の連続時間版であるレヴィ運動（安定型におけるブラウン運動類似物），すなわちが対称安定系で、定常かつ独立な増分を持つものとする。 これにたいして、上の線形和の極限である確率積分 $\int f(t) dZ(t)$ を考えることが出来る。このリーマン積分の収束は上のヒントにより、 L^α 空間で考

えれば良い事がわかる。 しかし、ここでは $0<\alpha\leq 2$ であり、すこし工夫が必要である。

$$L^{(\alpha)}=\{f;\int_{\mathbf{R}}|f(t)|^{\alpha}dt<\infty\},\ d(f,g)\equiv\left\{\int|f|^{\alpha}dt\right\}^{1\wedge\frac{1}{\alpha}}$$

と置くと、距離関数 d でこの空間は、$1\leq\alpha\leq 2$ では、バナッハ空間、$0<\alpha<1$ では距離空間となる。 もし、$f_n\to f,\ in\ L^{(\alpha)}$ なら $\int f_n dZ(t)\to\int fdZ(t)$, in probability である。 このことは、ガウス型の理論が、分散（すなわち内積）概念抜きで述べられれば、そのまま安定型の理論になる可能性を強く示唆している。

(C) [非中心極限定理。] もし、独立かつ同分布の確率変数系 X_i の正規化された和 $\frac{1}{N^{1/\alpha}}\sum^{N}X_i$ が分布収束するならば、その収束先は、指数 α の（必ずしも対称でない）安定分布に限られる。もし分布が原点で対称であれば、対称安定分布である。このように、正規化定数が違うだけであるので、ガウス型が自然界に現れるというのなら、同等の理由をもって、安定型も自然界に出現しているはずである。

1-4 .

こうして、ガウス型類似のものとして、対称安定型の確率変数系で考えるならば、ガウス型で成立する理論が拡張出来る可能性がある。 実際、古城によって標準表現の理論が安定型確率過程にまで拡張されている。 そこでは、ガウス型では、標準表現ではないが安定型では標準表現になる興味深い例が得られている ([3,4,5])。

さて、0-2 で見たように、ガウス型と比べて安定型は非常に複雑な構造、言い換えれば非常に豊富な構造を持っており、それだけに取り扱いが厄介である。 たとえば、２つの安定型確率過程 $X(t),Y(t)$ が等しい事をいうためには、総ての次数の有限次元分布の一致を示す事が必要である。ガウス型では、２次元分布の一致すなわち、共分散の一致をいえば充分であるのと比べればこの複雑さが想像出来よう。 次の§では、有限次元分布による決定性のある例を見よう。

§2. Chentson 型確率過程と決定性.

2-1.

$(E,\mathfrak{B},\mu)$ を測度空間とする。 $\mathfrak{B}$ をパラメータにする確率場 $\{Y(B);B\in\mathfrak{B}\}$ が指数 α

の対称安定型ランダムメジャー（安定型ホワイトノイズ）であるとは、

i. 指数 α の対称安定型確率変数系である。

ii. $\mathbf{E}[\exp(itY(B))] = \exp -\mu(B)|t|^{\alpha}$.

iii. 互いに交わりを持たない加算個の集合 $B_1, B_2, B_3, \cdots$ にたいして、

$$Y(\cup_i B_i) = \sum_i Y(B_1), a.s.,$$

かつ右辺は独立確率変数の和。

ランダムメジャーは構造が簡単であるので、容易に存在を示すことができる。

考えたい確率過程のパラメータ空間を T とすると、T から $\mathfrak{B}$ への写像 $S.$ が与えられれば

$$X(s) = Y(S_s),\ t \in T$$

として、 Chentsov 型と呼ばれる安定過程が構成出来る。こうして出来る確率過程はそのスペクトルに特長がある。 例として２次元分布を見よう。

$$\mathbf{E}[\exp i(t_1 X(s) + t_2 X(u))]$$

$$= \mathbf{E}[\exp i(t_1 Y(S_s \cap \complement S_u) + (t_1 + t_2) Y(S_s \cap S_u) + t_2 Y(\complement S_s \cap S_u))]$$

Y が交わりのない集合に関しては独立な確率変数を与える事に注意して

$$= \exp - \left\{ |t_1|^{\alpha} \mu(S_s \cap \complement S_u) + |t_1 + t_2|^{\alpha} \mu(S_s \cap S_u) + |t_2|^{\alpha} \mu(\complement S_s \cap S_u) \right\}.$$

このように、スペクトルは $3 = 2^2 - 1$（実は、対称性から６点であるが、以下第１像現だけ考える事にする）の点に集中している。 もちろん n 次元であれば、$2^n - 1$ 点である。 無矛盾性の条件は当然自動的に充たされている。 例えば、$\mu(S_s \cap S_u \cap \complement S_v) + \mu(S_s \cap S_u \cap S_v) = \mu(S_s \cap S_u)$ (s, u, v) で決まる３次元分布とその (s, v) に関する２次元の周辺分布との間の無矛盾性の条件である。 ここで、$(s), (u), (v), (u, v), (v, s), (s, u)$ の６つの周辺分布を知って、(s, u, v) の $7 = 2^3$ の点でのスペクトルの重みを決定することは、一般には不可能である。(無矛盾せいからは独立な関係式が６つしか得られない）ところが、３次元分布のスペクトルの重みに関する情報が分かっているとしよう。 たとえば、必ず１点はスペクトルの重みが０であるとする。 すると、未知数６に対して、関係式が６あり３次元分布は２次元分布より決定さ

れてしまう。　３次元でスペクトルの台の数が 2^3-2 以下であればｎ次元でも 2^n-2 以下である事はすぐに解るので、結局このときには、確率過程が（ガウス型と同じ様に）２次元分布で決定されることが解った。

こんな都合の良い例が見つかるだろうか？　$T=E=\mathbf{R}^1$, $S_u=\{y;|y-u|\le 1\}$, $d\mu(u)=du$ としよう。(s,u,v) をどんなに取ろうと３次元分布に現れる７つの組み合わせのうち１つ以上が空である。　例えば $s<u<v$ とすると、$S_s\cap \complement S_u\cap S_v=\emptyset$.

同様に $T=E=\mathbf{R}^2$, $S_u=\{|y-u|\le 1\}$ とすると、４次元分布に現れる１５個の組み合わせのうち１つ以上が空となる。　この事は、受験時代を思い出せは、４つの集合の関係を図示するとき、各集合を円板で表わすともれる場合があるという事実を思いだしていただきたい。

上の用にして表わされる安定型確率過程のクラスに自己相似安定過程がある。

2-2. 自己相似安定系 ([**17**].

Mandelbrot による fractional Brownian motion の概念 [20] を安定型確率変数系に拡張して自己相似安定系を定義する。径数空間 M をユークリッド空間 R^d にとる。 R^d の運動群を $M(d)$, $G=M(d)\times R_+$ をユークリッド相似変換群とする。

$\{X_\alpha(t);t\in R^d\}$ が (α,H)-過程であるとは

(i) 指数 α の対称安定系である、

(ii) $H>0$ が存在して、任意の $c\in R_+$ について $X_\alpha(ct)\overset{\mathcal{L}}{\sim} c^H X_\alpha(t)$ （自己相似性)、

(iii) 任意の $g\in M(d)$ に対して $X_\alpha(g\cdot t)-X_\alpha(g\cdot 0)\overset{\mathcal{L}}{\sim} X_\alpha(t)$ （定常増分性)

をみたすときをいう。

以下 $\overset{\mathcal{L}}{\sim}$ を、確率場として同等、すなわち任意の有限次元分布が等しいとの意味とする。

$0<H<\frac{1}{\alpha}$ であるときの (α,H)-過程はつぎのように構成できる。

E として、R^d の $d-1$ 次元球面全体の集合 $\mathfrak{S}_d$、B_t として原点 Oと $t\in R^d$ を分離する $\mathfrak{S}_d$ の要素の全体の集合 $S_d(t)$ とする。Eの元は球面であるから、球の中心を x、半径を rとして (x,r) と表すことにより E に座標を導入できる。これにより $E=R^n\times R_+$ とみなすことができる。E 上の測度 μ を $d\mu_\beta(x,r)=r^{\beta-d-1}dxdr$ とする。$0<\beta<1$ のとき、またこの時に限って $\mu_\beta(S_d(t))<\infty$ であることがわかる。$(\mathfrak{S}_d,S_d(t),\mu_\beta)$ に従う対称安定過程を $X_\alpha^\beta(t)$ とする。

2-3. 決定性.

この d 変数の対称安定過程を Chentsov 型と呼ぶことにするが、このスペクトルにかんして、$d+2$ 次元分布で丁度１点だけ重みが０になることがわかる。 この事実は、上の構成中の集合 $S_d(\cdot)$ （錘体）の初等幾何学的性質からきているが、証明は易しくない ([12])。これより、

◎ d 変数の Chentsov 型の自己相似対称安定過程は、$d+1$ 次元の周辺分布で決定されてしまう。

２次元スペクトルが純点型であれば、任意の次元のスペクトルも純点型であることおよび、Chentsov 型のスペクトルの台の位置に注意すれば、強い形での決定性が得られる。

◎ 必ずしも Chentsov 型とは限らない、d パラメータの安定型確率変数系が Chentsov 型の自己相似安定過程と $d+2$ 次元分布を共有すれば、確率過程として、一致する ([18])。

◎さらに複雑に、自己相似安定過程で、２次元分布は上の Chentsov 型と一致するが３次元分布以上が異なるものといった例も構成出来る ([14,17])。

◎古城の最近の結果によると、広義 n 重 マルコフ過程も ($n>1$ であれば、純点スペクトルではない) 同様に $n+1$ 次の決定性を持つ ([5,6,7])。

安定過程の研究は始まったばかりであり、その基礎的な性質を探っている段階であるが、既に米国では long tail を持つ分布（すなわち分散、さらには平均を持つとは限らない分布）を示す現象、例えば地価、株価等の分析への応用がはじまっている。 ガウス型（平均、分散を含む総てのモーメントが有限という基本過程を含む）では取り扱えない分野へ応用出来る可能性があるだけでなく、ヒルベルト空間論に走りすぎた従来のガウス型の理論の手法への反省としても安定過程の研究の発展が望まれる。これまで、安定過程に関する教科書としては、佐藤健一「加法過程」([11]) があるのみだったが、この１年の間に新たに２冊出版され ([2,10])、系統的な知識が得易くなったことを最後に記しておく。

References

1. T. Hida, *Canonical representations of Gaussian processes and their applications*, Memoirs of the College of Science, Univ. Kyoto **33** (1960), 109–155.
2. A. Janicki and A. Weron, *Simulation and Chaotic Behavior of α-stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, 1993.
3. 古城 克也, 対称安定過程の標準表現と $M(t)$-過程への応用, 名古屋大学修士論文 (1991).
4. K. Kojo, *$S\alpha S$ $M(t)$-processes and their canonical representations*, Hiroshima Math. J. **23** (1993), 305–326.
5. ———, *On the notion of multiple $S\alpha S$ Markov processes*, Hiroshima Math. J. (to appear).
6. 古城 克也, $S\alpha S$ 過程の広義多重 *Markov* 性について, 統数研リポート４４ (1993), 1-5.
7. ———, ある種の $S\alpha S$定常過程の有限次元分布に関する *determinim*, 統数研リポート４４ (1993), 6-11.
8. K. Kojo and S. Takenaka, *On canonical representations of stable $M(t)$-processes*, Probab. and Math. Stat. **13** (1992), 229-238.
9. P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
10. G. Samorodnitsky and M. S .Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman Hall, 1994.
11. 佐藤 健一, 加法過程, 紀伊國屋書店, 1990.
12. Y. Sato, *Distributions of stable random fields of Chentsov type*, Nagoya M. J. **123** (1991), 119–139.
13. ———, *structure of bivariate distributions of linear fractional stabel and Chentsov type stable processes*, Probability Theory and Mathematical Statistics, Proceedings of the Sixth USSR-Japan Symposium, World Scientific, 1992.
14. Y. Sato and S. Takenaka, *On determinism of symmetric α-stable processes of generalized Chentsov type*, Gaussian Random Fields, World Scientific, 1992, pp. 332-345.
15. S. Takenaka, *Representations of Euclidean random field*, Nagoya Math. J. **105** (1987), 19–31.
16. ———, *Integral geometric construction of self-similar stable processes*, Nagoya Math. J. **123** (1991), 1–12.
17. ———, *Examples of self-similar stable processes*, Stochastic Processes, Springer, 1993, pp. 303–311.
18. 竹中 茂夫, 離散スペクトル型安定場の決定性について, 統数研リポート５１ (1993), 61-65.

〒724 東広島市 鏡山１丁目
E-mail address: r0044@math.sci.hiroshima-u.ac.jp